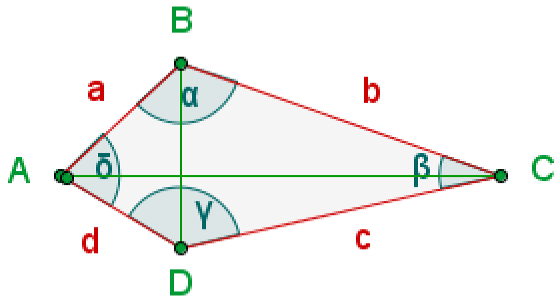
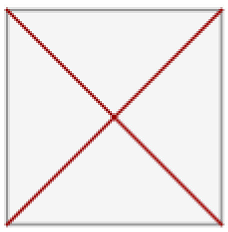
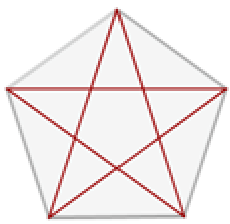
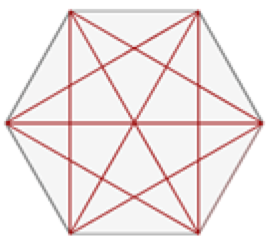
POLÍGONOS

Polígonos
Un polígono es la región del plano limitada por tres o más segmentos.
Elementos de un polígono



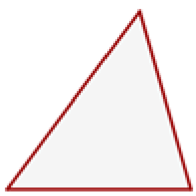
Lados
Son los segmentos que lo limitan.
Vértices
Son los puntos donde concurren dos lados.
Ángulos interiores de un polígono
Son los determinados por dos lados consecutivos.
Suma de ángulos interiores de un polígono
Si n es el número de lados de un polígono:
Suma de ángulos de un polígono = $(n - 2)$ **·180°**
Diagonal
Son los segmentos que determinan dos vértices no consecutivos
Número de diagonales de un polígono
Si n es el número de lados de un polígono:
Número de diagonales = $n \cdot (n - 3) : 2$

$4 \cdot (4 - 3) : 2 = 2$ $5 \cdot (5 - 3) : 2 = 5$ $6 \cdot (6 - 3) : 2 = 9$

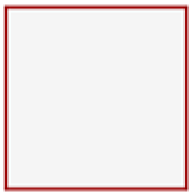
Clasificación de polígonos según sus lados

Triángulos



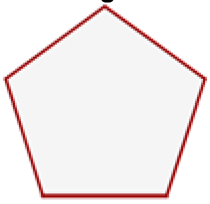
Tienen 3 lados.

Cuadriláteros



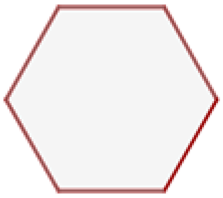
Tienen 4 lados.

Pentágonos



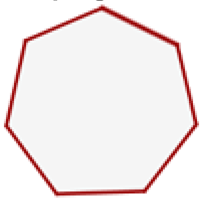
Tienen 5 lados.

Hexágonos



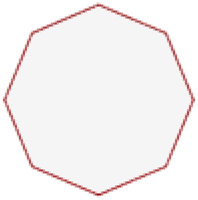
Tienen 6 lados.

Heptágonos



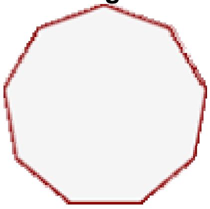
Tienen 7 lados.

Octágonos



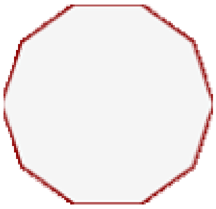
Tienen 8 lados.

Eneágono



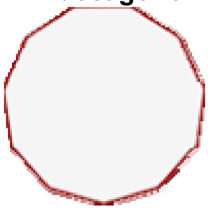
Tiene los 9 lados.

Decágono



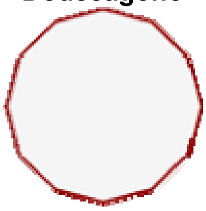
Tiene 10 lados.

Endecágono



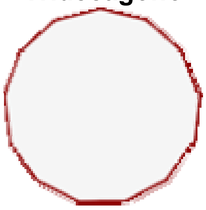
Tiene 11 lados.

Dodecágono



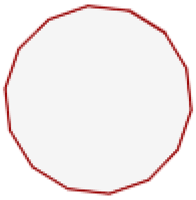
Tiene 12 lados.

Tridecágono



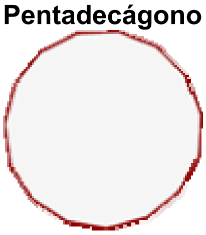
Tienen 13 lados.

Tetradecágono



Tiene 14 lados.

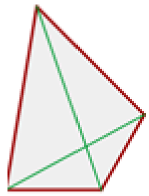
Pentadecágono



Tiene 15 lados.

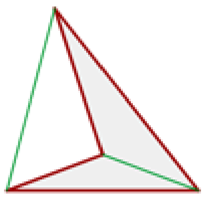
Clasificación de polígonos según sus ángulos

Convexos



Todos sus ángulos menores que 180°.
Todas sus diagonales son interiores.

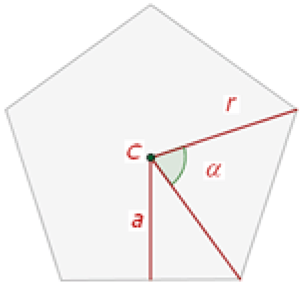
Cóncavos



Si un ángulo mide más de 180°.
Si una de sus diagonales es exterior.

Polígonos regulares

Un polígono regular es el que tiene sus ángulos iguales y sus lados iguales.
Elementos de un polígono regular

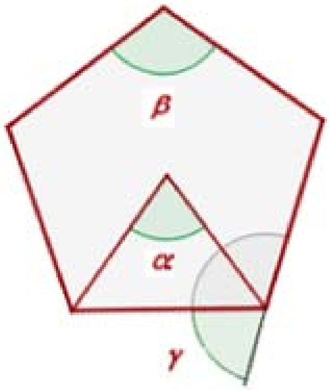


Centro
Punto interior que equidista de cada vértice
Radio
Es el segmento que va del centro a cada vértice.

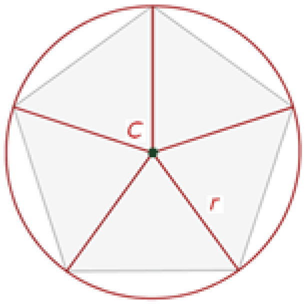
Apotema

Distancia del centro al punto medio de un lado.

Ángulos de un polígono regular

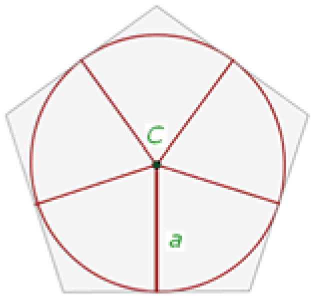


Ángulo central de un polígono regular
Es el formado por dos radios consecutivos.
Si **n** es el número de lados de un polígono:
Ángulo central = 360° : n
Ángulo central del pentágono regular= 360° : 5 = 72º
Ángulo interior de un polígono regular
Es el formado por dos lados consecutivos.
Ángulo interior =180° − Ángulo central
Ángulo interior del pentágono regular = 180° − 72º = 108º
Ángulo exterior de un polígono regular
Es el formado por un lado y la prolongación de un lado consecutivo.
Los **ángulos exteriores e interiores son suplementarios**, es decir, que suman 180º.
Ángulo exterior = Ángulo central
Ángulo exterior del pentágono regular = 72º
Polígono inscrito
Un polígono está inscrito en una circunferencia si todos sus vértices están contenidos en ella.
Circunferencia circunscrita



Es la que toca a cada vértice del polígono
Su centro equidista de todos los vértices.
Su radio es el radio del polígono.

Circunferencia inscrita

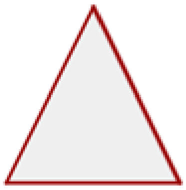


Es la que toca al polígono en el punto medio de cada lado.
Su centro equidista de todos los lados.

Su radio es la apotema del polígono.

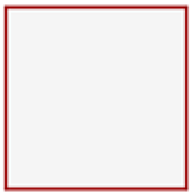
Tipos de polígonos regulares

Triángulo equilátero



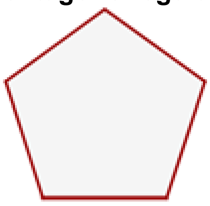
Tiene los 3 lados y ángulos iguales.

Cuadrado



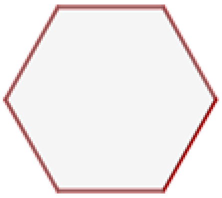
Tiene 4 lados y ángulos iguales.

Pentágono regular



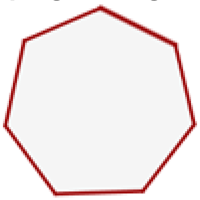
Tiene 5 lados y ángulos iguales.

Hexágono regular



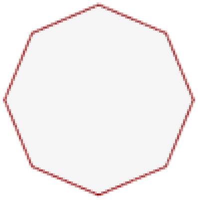
Tiene 6 lados y ángulos iguales.

Heptágono regular



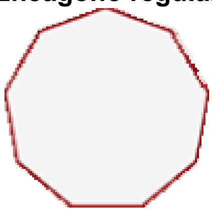
Tienen 7 lados y ángulos iguales.

Octágono regular



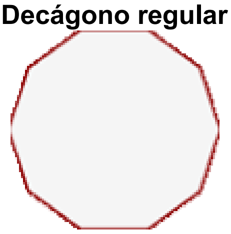
Tiene 8 lados y ángulos iguales.

Eneágono regular



Tiene los 9 lados y ángulos iguales.

Decágono regular

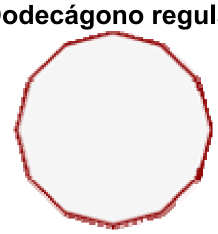


Tiene 10 lados y ángulos iguales.

Endecágono regular

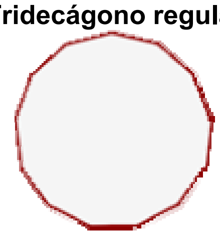
Tiene 11 lados y ángulos iguales.

Dodecágono regular



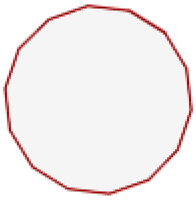
Tiene 12 lados y ángulos iguales.

Tridecágono regular



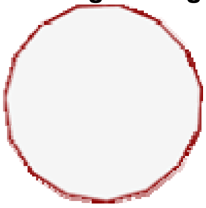
Tienen 13 lados y ángulos iguales.

Tetradecágono regular



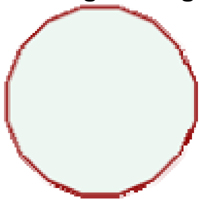
Tiene 14 lados y ángulos iguales.

Pentadecágono regular



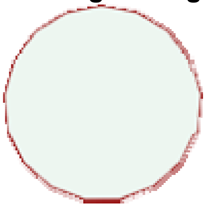
Tiene 15 lados y ángulos iguales.

Hexadecágono regular



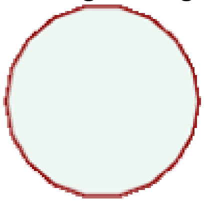
Tiene 16 lados y ángulos iguales.

Heptadecágono regular



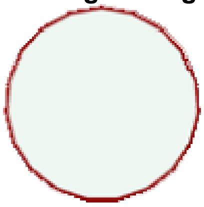
Tiene 17 lados y ángulos iguales.

Octadecágono regular



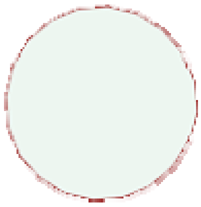
Tiene 18 lados y ángulos iguales.

Eneadecágono regular



Tienen 19 lados y ángulos iguales.

Icoságono regular



Tiene 20 lados y ángulos iguales.

TRIÁNGULO

Es el polígono de tres lados.

Propiedades de los triángulos

1 **Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.**

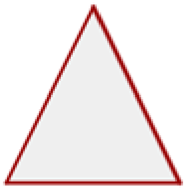
2 **La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.**

3 **El valor de un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes.**

Clases de triángulos

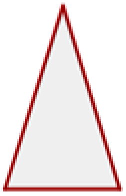
Según sus lados

Triángulo equilátero



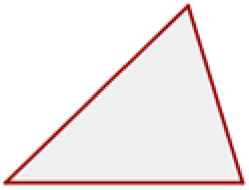
Tres lados iguales.

Triángulo isósceles



Dos lados iguales.

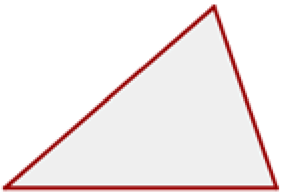
Triángulo escaleno



Tres lados desiguales

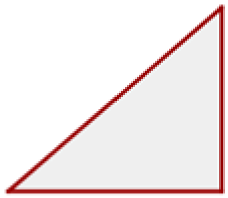
Según sus ángulos

Triángulo acutángulo



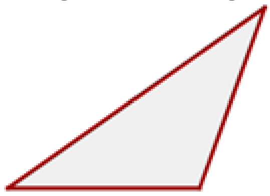
Tres ángulos agudos

Triángulo rectángulo



Un ángulo recto
El lado mayor es la hipotenusa.
Los lados menores son los catetos.

Triángulo obtusángulo



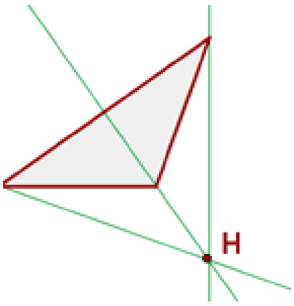
Un ángulo obtuso.

Elementos de un triángulo

Alturas de un triángulo

Altura es cada una de las rectas perpendiculares trazadas desde un vértice al lado opuesto (o su prolongación).

Ortocentro

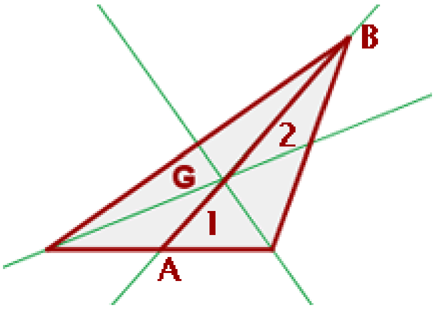


Es el punto de corte de las tres alturas.

Medianas de un triángulo

Mediana es cada una de las rectas que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto.

Baricentro



Es el punto de corte de las tres medianas.

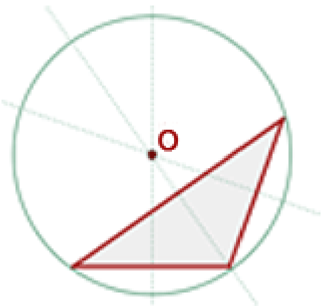
El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos, el segmento que une el baricentro con el vértice mide el doble que el segmento que une baricentro con el punto medio del lado opuesto.

BG = 2GA

Mediatrices de un triángulo

Mediatriz es cada una de las rectas perpendiculares trazadas a un lado por su punto medio.

Circuncentro



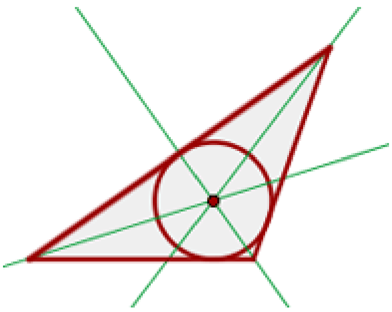
Es el punto de corte de las tres mediatrices.

Es el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo.

Bisectrices de un triángulo

Bisectriz es cada una de las rectas que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.

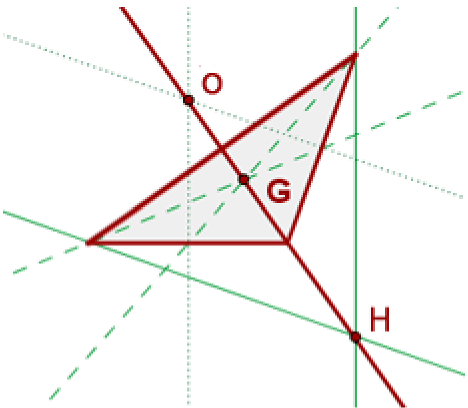
Incentro



Es el punto de corte de las tres bisetrices.

Es el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo.

Recta de Euler



El ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo no equilátero están alineados; es

decir; pertenecen a la misma recta, llamada recta de Euler.

Teorema del cateto

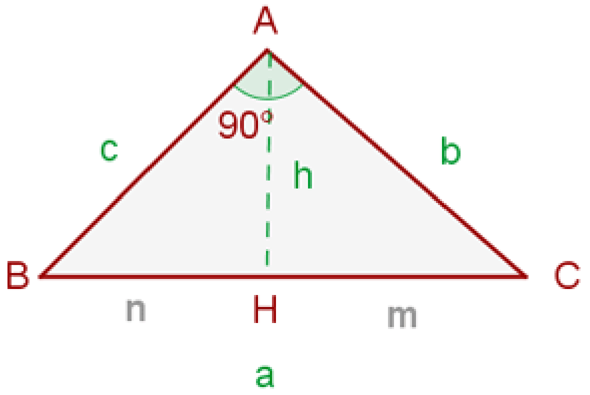
En todo triángulo rectángulo un cateto es media proporcional **entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.**

a $\longrightarrow$ **hipotenusa**

b y c $\longrightarrow$ **catetos**

m $\longrightarrow$ **proyección del cateto b sobre la hipotenusa**

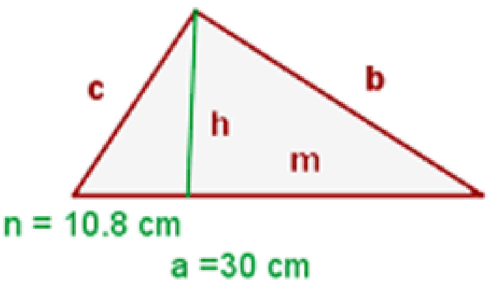
n $\longrightarrow$ **proyección del cateto c sobre la hipotenusa**



$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \qquad b^2 = a \cdot m$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \qquad c^2 = a \cdot n$$

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30 cm y la proyección de un cateto sobre ella 10.8 cm. Hallar el otro cateto.

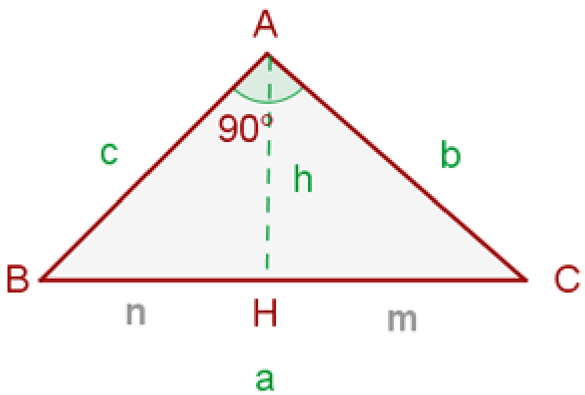


$$\frac{c}{30} = \frac{10.8}{c} \qquad c^2 = 30 \cdot 10.8$$

$$c = \sqrt{30 \cdot 10.8} \qquad c = 18\ cm$$

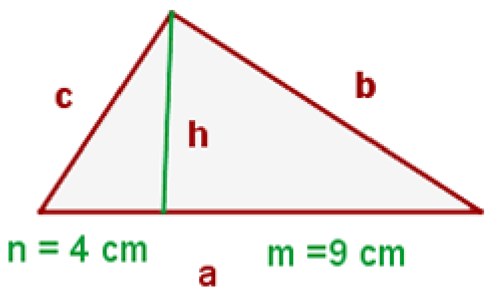
Teorema de la altura

En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los 2 segmentos que dividen a ésta.



$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \qquad h^2 = m \cdot n$$

En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 4 y 9 metros. Calcular la altura relativa a la hipotenusa.

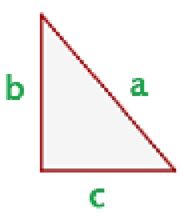


$$\frac{9}{h} = \frac{h}{4} \qquad h^2 = 36$$

$$h = \sqrt{36} \qquad h = 6\ cm$$

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

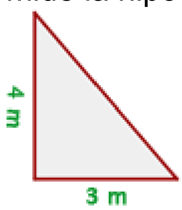


$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 \\ a = \sqrt{b^2 + c^2} \end{array}$$

Aplicaciones del teorema de Pitágoras

1 Conociendo los dos catetos calcular la hipotenusa

Los catetos de un triángulo rectángulo miden en 3 m y 4 m respectivamente. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

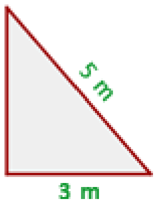


$a^2 = 3^2 + 4^2 \qquad a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,m$

2 Conociendo la hipotenusa y un cateto, calcular el otro cateto

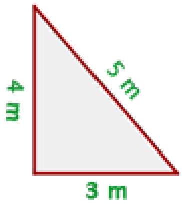
$a^2 = b^2 + c^2 \quad \nearrow \; c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \searrow \; b = \sqrt{a^2 - c^2}$

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5 m y uno de sus catetos 3 m. ¿Cuánto mide otro cateto?



$5^2 = 3^2 + c^2 \qquad c = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\,m$

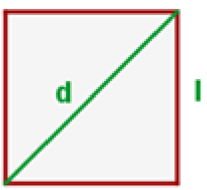
3 Conociendo sus lados, averiguar si es rectángulo
Para que sea rectángulo el cuadrado de lado mayor ha de ser igual a la suma de los cuadrados de los dos menores.
Determinar si el triángulo es rectángulo.



$5^2 = 3^2 + 4^2 \qquad 25 = 25$

Aplicaciones del teorema de Pitágoras

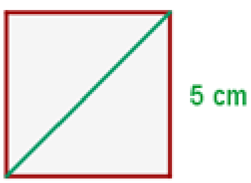
Diagonal del cuadrado



$d^2 = l^2 + l^2$

$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2}$

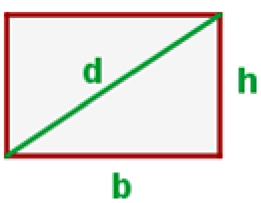
$d = l\sqrt{2}$



$d^2 = 5^2 + 5^2$

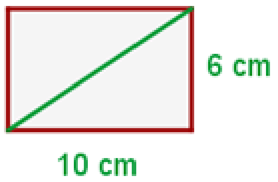
$d = \sqrt{50} = 7.07 \text{ cm}$

Diagonal del rectángulo



$$d^2 = b^2 + h^2$$

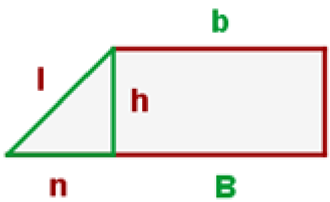
$$d = \sqrt{b^2 + h^2}$$



$$d^2 = 10^2 + 6^2$$

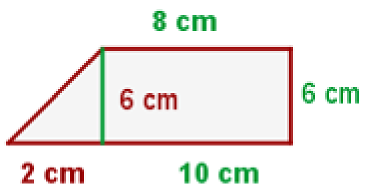
$$d = \sqrt{136} = 11.66 \text{ cm}$$

Lado oblicuo del trapecio rectángulo



$$n = B - b$$

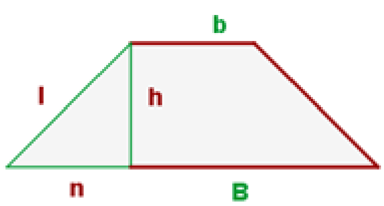
$$l = \sqrt{h^2 + n^2}$$



$$l^2 = 6^2 + 2^2$$

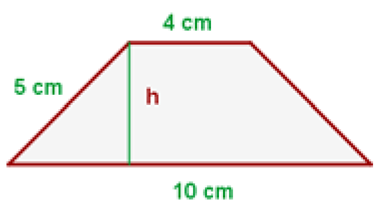
$$l = \sqrt{40} = 6.32 \text{ cm}$$

Altura del trapecio isósceles



$$n = B - b$$

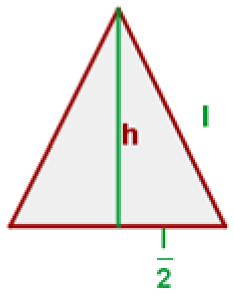
$$h = \sqrt{l^2 - n^2}$$



$$+3^2$$

$$h = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

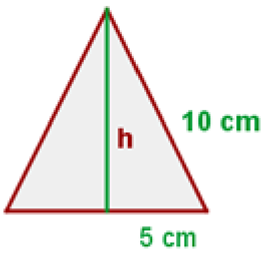
Altura del triángulo equilátero



$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \qquad l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} \qquad h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$

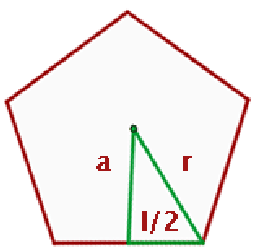
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$



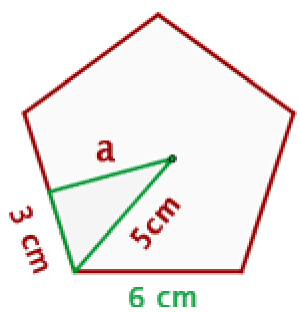
$$10^2 = h^2 + 5^2$$

$$h = \sqrt{100 - 25} = 77.94 \text{ cm}$$

Apotema de un polígono regular



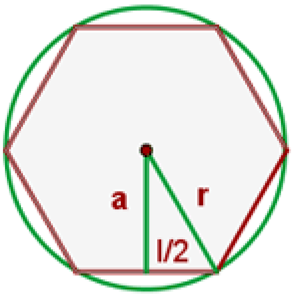
$$a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$



$$5^2 = a^2 + 3^2$$

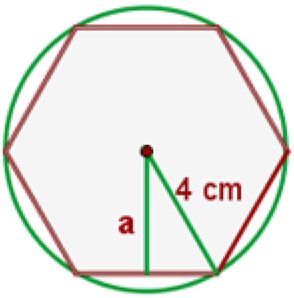
$$a = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

Apotema del hexágono inscrito



$$l = r$$

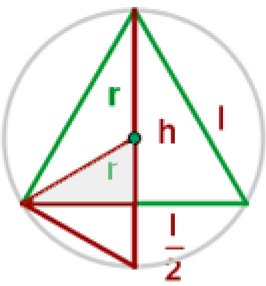
$$a = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$



$$l = r = 4$$

$$a = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3.46 \text{ cm}$$

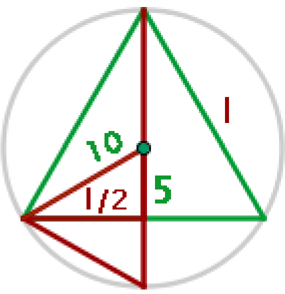
Lado de un triángulo equilátero inscrito



$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \qquad \left(\frac{l}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} \qquad \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{3 \cdot r^2}{4}}$$

$$\frac{l}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r \qquad l = \sqrt{3} \cdot r$$

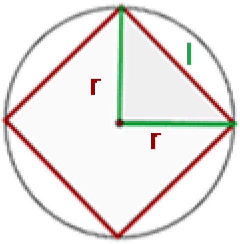


$$10^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 5^2$$

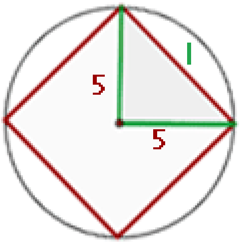
$$l = 2 \cdot \sqrt{75} = 17.32$$

$$\left(\frac{l}{2}\right) = \sqrt{75}$$

Lado de un cuadrado inscrito

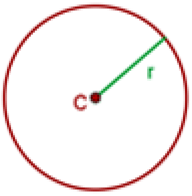


$$l = \sqrt{r^2 + r^2}$$



$$l = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07$$

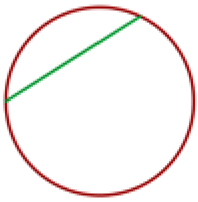
Circunferencia y círculo



Es una línea curva cerrada cuyos puntos están todos a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.

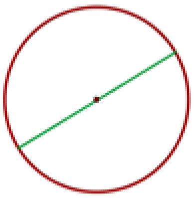
Centro
Punto del que equidistan todos los puntos de la circunferencia.
Radio
Segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma.

Elementos de la circunferencia
Cuerda



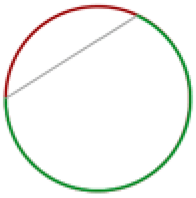
Segmento que une dos puntos de la circunferencia.

Diámetro



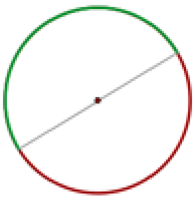
Cuerda que pasa por el centro.

Arco



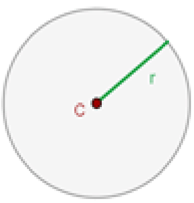
Cada una de las partes en que una cuerda divide a la circunferencia. Se suele asociar a cada cuerda el menor arco que delimita.

Semicircunferencia



Cada uno de los arcos iguales que abarca un diámetro.

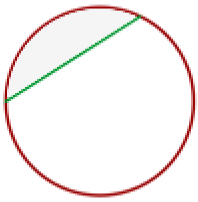
Círculo



Es la figura plana comprendida en el interior de una circunferencia.

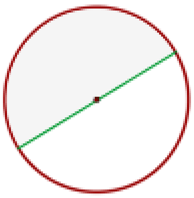
Elementos de un círculo

Segmento circular



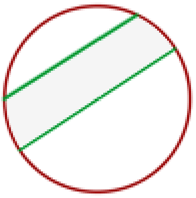
Porción de círculo limitada por una cuerda y el arco correspondiente.

Semicírculo



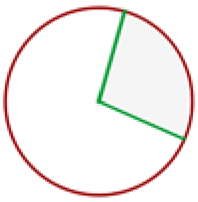
Porción del círculo limitada por un diámetro y el arco correspondiente. Equivale a la mitad del círculo.

Zona circular



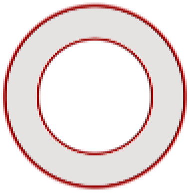
Porción de círculo limitada por dos cuerdas.

Sector circular



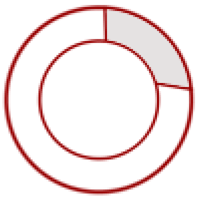
Porción de círculo limitada por dos radios.

Corona circular



Porción de círculo limitada por dos círculos concéntricos.

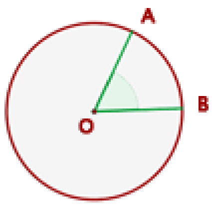
Trapecio circular



Porción de círculo limitada por dos radios y una corona circular.

Ángulos en la circunferencia

Ángulo central

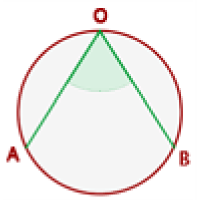


Ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios.

La medida de un arco es la de su ángulo central correspondiente.

$$\widehat{AOB} = \widehat{AB}$$

Ángulo inscrito

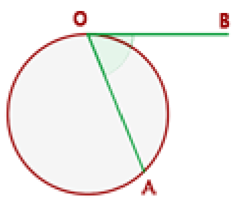


Su vértice está en la circunferencia y sus lados son secantes a ella.

Mide la mitad del arco que abarca.

$$\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

Ángulo semiinscrito

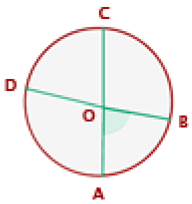


Su vértice está en la circunferencia, un lado secante y el otro tangente a ella.

Mide la mitad del arco que abarca.

$$\overset{\frown}{AOB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

Ángulo interior



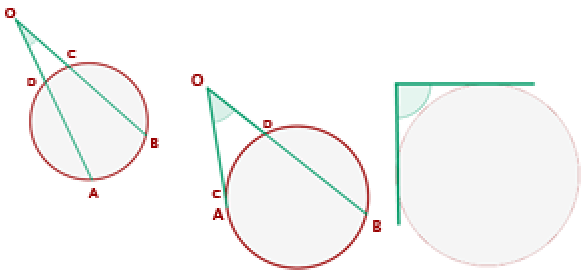
Su vértice es interior a la circunferencia y sus lados secantes a ella.

Mide la mitad de la suma de las medidas de los arcos que abarcan sus lados y las prolongaciones de sus lados.

$$\overset{\frown}{AOB} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}\right)$$

Ángulo exterior

Su vértice es un punto exterior a la circunferencia y los lados de sus ángulos son: o secantes a ella, o uno tangente y otro secante, o tangentes a ella:



Mide la mitad de la diferencia entre las medidas de los arcos que abarcan sus lados sobre la circunferencia.

$$\overset{\frown}{AOB} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}\right)$$

Polígonos estrellados

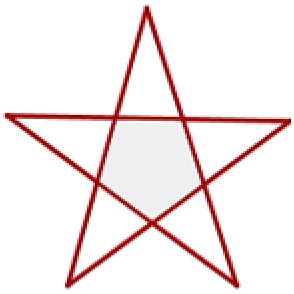
Un polígono regular estrellado se construye uniendo los vértices no consecutivos, de un polígono regular convexo, de forma continua.

Se denotan por N/M, siendo N el número de vértices del polígono regular convexo y M el salto entre vértices.

N/M ha de ser fracción irreducible.

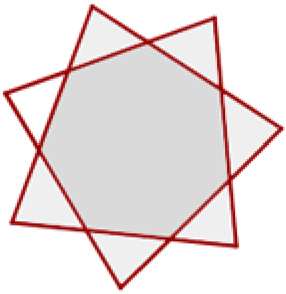
El polígono N/M es el mismo que el N/(N-M), ya que el polígono estrellado que se obtiene uniendo vértices en un sentido y en el contrario es el mismo.

Pentágono regular estrellado

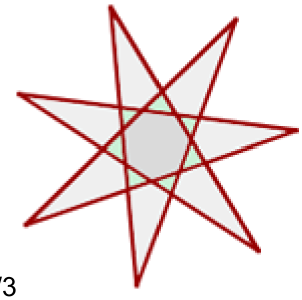


5/2

Heptágonos regulares estrellados

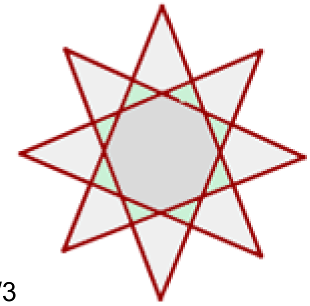


7/2



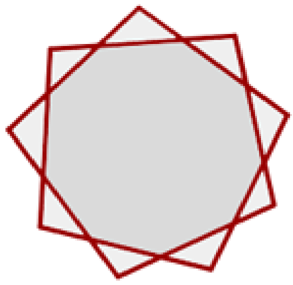
7/3

Octógono regular estrellado

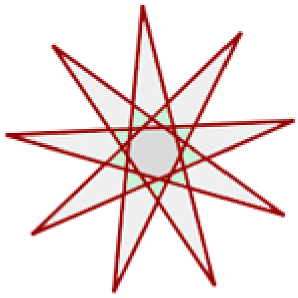


8/3

Eneágonos regulares estrellados

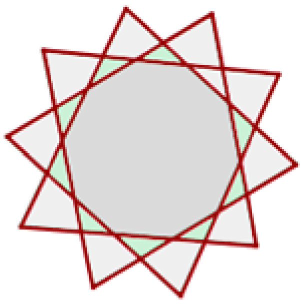


9/2



9/4

Decágono regular estrellado



10/3

Ejercicios

1Determinar el lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro es igual al de un cuadrado de 12 cm de lado. ¿Serán iguales sus áreas?

2Calcular el área de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 6 cm.

3Dado un triángulo equilátero de 6 m de lado, hallar el área de uno de los sectores determinado por la circunferencia circunscrita y por los radios que pasan por los vértices.

4Determinar el área del cuadrado inscrito en una circunferencia de longitud 18.84 m.

5 En un cuadrado de 2 m de lado se inscribe un círculo y en este círculo un cuadrado y en este otro círculo. Hallar el área comprendida entre el último cuadrado y el último círculo.

6 Calcular el área de la corona circular determinada por las circunferencias inscrita y circunscrita a un cuadrado de 8 m de diagonal.

7 En una circunferencia de radio igual a 4 m se inscribe un cuadrado y sobre los lados de este y hacia el exterior se construyen triángulos equiláteros. Hallar el área de la estrella así formada.

8 El perímetro de un trapecio isósceles es de 110 m, las bases miden 40 y 30 m respectivamente. Calcular los lados no paralelos y el área.

9 Si los lados no paralelos de un trapecio isósceles se prolongan, quedaría formado un triángulo equilátero de 6 cm de lado. Sabiendo que el trapecio tiene la mitad de la altura del triángulo, calcular el área del trapecio.

10 El área de un cuadrado es 2304 cm^2. Calcular el área del hexágono regular que tiene su mismo perímetro.

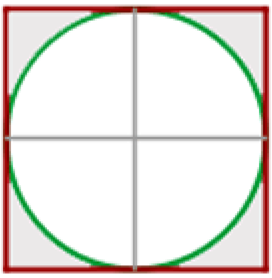
11 La superficie de una mesa está formada por una parte central cuadrada de 1 m de lado y dos semicírculos adosados en dos lados opuestos. Calcula el área.

12Hallar el área de un sector circular cuya cuerda es el lado del triángulo equilátero inscrito, siendo 2 cm el radio de la circunferencia.

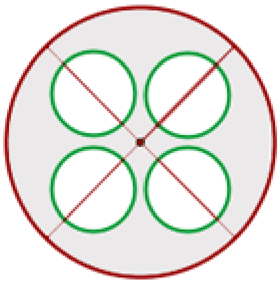
13 Hallar el área del sector circular cuya cuerda es el lado del cuadrado inscrito, siendo 4 cm el radio de la circunferencia.

14Dadas dos circunferencias concéntricas de radio 8 y 5 cm, respectivamente, se trazan los radios OA y OB, que forman un ángulo de 60°. Calcular el área del trapecio circular formado.

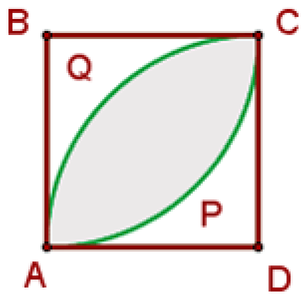
15Calcula el área sombreada, sabiendo que el lado de cuadrado es 8 cm y el radio del círculo menor mide 2 cm.



16Calcula el área de la parte sombreada, si el radio del círculo mayor mide 6 cm y el radio de los círculos pequeños mide 2 cm.



17 Calcula el área de la parte sombreada, siendo AB = 10 cm, ABCD un cuadrado y APC Y AQC arcos de circunferencia de centros B y D.



18A un hexágono regular 4 cm de lado se le inscribe una circunferencia y se le circunscribe otra. Hallar el área de la corona circular así formada.

19 En una circunferencia una cuerda de 48 cm y dista 7 cm del centro. Calcular el área del círculo.

20Los catetos de un triángulo inscrito en una circunferencia miden 22.2 cm y 29.6 cm respectivamente. Calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo.